

**федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Первый Московский государственный медицинский университет им. И.М. Сеченова
Министерства здравоохранения Российской Федерации
(Сеченовский Университет)**

Методические материалы по дисциплине:

Математический анализ

Основная профессиональная образовательная программа высшего образования – программа специалитета.

12.05.01 Электронные и оптико-электронные приборы и системы специального назначения

1. Существует ли биекция между множеством всех действительных чисел и интервалом $(-1, 1)$?

Ответ: Да, например такую биекцию осуществляет функция $y = 2 \arctg(x)/\pi$.

2. Существует ли биекция между множеством всех натуральных чисел и множеством всех целых чисел?

Ответ: Да, например такую биекцию осуществляет функция $m = n/2$ для всех чётных натуральных n и $m = (1 - n)/2$ для всех нечётных натуральных n .

3. Чему равна сумма всех биномиальных коэффициентов C_n^k , где n – фиксированное натуральное число, а k пробегает целые значения от 0 до n ?

Ответ: 2^n .

4. Чему равна сумма $C_n^k + C_n^{k-1}$, где n – фиксированное натуральное число, а k – какое-либо натуральное число от 1 до n ?

Ответ: C_{n+1}^k .

5. Какой из биномиальных коэффициентов C_n^k , где n – фиксированное чётное натуральное число, а k пробегает целые значения от 0 до n , является наибольшим?

Ответ: $C_n^{\frac{n}{2}}$.

6. Чему равен модуль произведения двух комплексных чисел, если модуль первого из первого чисел равен 2, а модуль второго равен 3?

Ответ: 6

7. Сколько существует различных комплексных чисел, куб которых равен 1?

Ответ: три.

8. Чему равняется $\cos(3x)$, если $\cos(x) = a$?

Ответ: $\cos(3x) = 4a^3 - 3a$.

9. Чему равняется $\sin(3x)$, если $\sin(x) = a$?

Ответ: $\sin(3x) = 3a - 4a^3$.

10. Сколько общих точек имеет система стягивающихся отрезков?

Ответ: одну.

11. Чему равняется наибольший член последовательности $a_n = \frac{n}{n^2+100}$, где n – натуральное?

Ответ: $a_{10} = \frac{1}{20}$.

12. Чему равняется наименьший член последовательности $a_n = n + \frac{64}{n}$, где n – натуральное?

Ответ: $a_8 = 16$.

13. Чему равняется предел последовательности $a_n = \frac{n^{10}}{2n^{10}+n+100}$, где n – натуральное?

Ответ: $\frac{1}{2}$.

14. Чему равняется предел последовательности $a_n = \frac{200n^9}{2n^{10} - n + 100}$, где n – натуральное?

Ответ: 0.

15. Чему равняется предел последовательности $a_n = \frac{n^{10}}{2^n}$, где n – натуральное?

Ответ: 0.

16. Чему равняется предел последовательности $a_1 = 0, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ при всех натуральных n ?

Ответ: 2.

17. Существуют ли последовательность, у которой нет предела?

Ответ: да, например, $a_n = (-1)^n$

18. Является ли число e рациональным?

Ответ: нет

19. Какое из чисел больше: $e, 1,001^{1000}$ или $1,01^{101}$?

Ответ: $1,01^{101}$

20. Может ли сумма двух непрерывных в точке функций быть разрывной в этой точке?

Ответ: нет

21. Может ли сумма двух разрывных в точке функций быть непрерывной в этой точке?

Ответ: да

22. Существует ли функция, которая разрывна в каждой точке действительной прямой?

Ответ: да, например, функция Дирихле, которая равна 1 во всех рациональных точках и 0 – в иррациональных

23. Чему равняется предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$?

Ответ: 0.

24. Чему равняется предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$?

Ответ: 1.

25. Чему равняется предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$?

Ответ: e .

26. Чему равняется предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$?

Ответ: 0.

27. Может ли множество точек разрыва монотонной функции быть несчётным?

Ответ: нет

28. Может ли непрерывная на отрезке функция быть неограниченной на этом отрезке?

Ответ: нет

29. Может ли непрерывная на интервале функция быть неограниченной на этом интервале?

Ответ: да, например, $f(x) = \frac{1}{x}$ на интервале $(0, 1)$

30. Является ли функция $f(x) = \frac{1}{x}$ равномерно непрерывной на интервале $(0, 1)$?

Ответ: нет

31. Является ли функция $f(x) = \frac{1}{x}$ равномерно непрерывной на интервале $(1, 2)$?

Ответ: да

32. Следует ли из непрерывности функции в точке её дифференцируемость в этой точке?

Ответ: нет, например, $f(x) = |x|$ непрерывна в нуле, но не дифференцируема в этой точке

33. Следует ли из дифференцируемости функции в точке её непрерывность в этой точке?

Ответ: да

34. Может ли сумма двух дифференцируемых в точке функций быть недифференцируемой в этой точке?

Ответ: нет

35. Может ли сумма двух недифференцируемых в точке функций быть дифференцируемой в этой точке?

Ответ: да

36. Чему равна производная всюду дифференцируемой функции в точке её локального экстремума?

Ответ: нулю

37. Какие значения может принимать производная возрастающей дифференцируемой функции?

Ответ: неотрицательные

38. Существует ли строго возрастающая функция, производная которой обращается в 0 в какой-либо точке?

Ответ: да, например, $f(x) = x^3$, производная которой равна нулю в нуле

39. Какое из чисел больше: e^π или π^e ?

Ответ: e^π

40. Чему равна пятидесятая производная функции $f(x) = \sin(x)$?

Ответ: $f^{(50)}(x) = -\sin(x)$

41. Сколько точек минимума может иметь всюду дифференцируемая строго выпуклая вниз функция?

Ответ: не более одной

42. Может ли график наклонной асимптоты определённой всюду функции иметь бесконечно много общих точек с графиком этой функции?

Ответ: да, например, для функции $f(x) = x + \frac{\sin(x)}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 1$

43. Может ли множество значений всюду непрерывной функции не быть промежутком?

Ответ: нет

44. Может ли в некоторой точке не существовать предел отношения двух функций, если в этой точке существует предел каждой из этих функций?

Ответ: может, например, для функций $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ и $g(x) = x$ в точке 0

45. Чему равен коэффициент разложения нечётной бесконечно дифференцируемой функции по формуле Маклорена с $n > 1$ при x^2 ?

Ответ: нулю

46. Может ли определённая на промежутке функция не иметь первообразной на этом промежутке?

Ответ: да, например, такова определённая на всей прямой функция сигнум (равная 0 в нуле, 1 при положительных значениях аргумента и -1 – при отрицательных)

47. Чему равен неопределённый интеграл от функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty, 0)$?

Ответ: $\ln(-x) + C$

48. Чему равен неопределённый интеграл от функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty, 0)$?

Ответ: $\ln(-x) + C$

49. Какие определённые на всей действительной прямой функции $f(x)$ являются первообразными для самих себя?

Ответ: $C \cdot e^x$

50. Какой вид может иметь первообразная рациональной функции?

Ответ: линейная комбинация рациональных функций, арктангенсов от линейных функций и логарифмов от линейных функций и от квадратных трёхчленов