федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Первый Московский государственный медицинский университет им. И.М. Сеченова
Министерства здравоохранения Российской Федерации
(Сеченовский Университет)

Методические материалы по дисциплине:

Матрицы и вычисления

Основная профессиональная образовательная программа высшего образования – программа специалитета.

12.05.01 Электронные и оптико-электронные приборы и системы специального назначения

1. Вопрос. Какая матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется эрмитовой?

   Ответ. Элементы которой удовлетворяют равенству $a_{ij} = \overline{a_{ji}} \quad \forall i,j$.
2. Какая матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется унитарной?
   Ответ. Удовлетворяющая равенству $A^* = A^{-1}$.
3. Вопрос. Какова трудоемкость метода Гаусса при решении СЛАУ с заполненной $n \times n$ матрицей (асимптотически по n)?
   Ответ. $\frac{2}{3}n^3 + O\left(n^2\right)$ flops.
4. Вопрос. Какова трудоемкость метода прогонки при решении СЛАУ с n уравнениями и трехдиагональной матрицей?
   Ответ. $O(n)$ flops.
5. Каково достаточное условие реализуемости метода Гаусса без выбора ведущего элемента?
   Ответ. Все главные миноры матрицы отличны от 0
6. Если Q – ортогональная матрица, то чему равен её определитель?
   Ответ. $|\,det\, Q| = 1$.
7. Является ли нормой вектора $x \in \mathbb{R}^n$ функция $\sum_{i=2}^{n} |x_i - x_{i-1}|$?
   Ответ. Нет, так как не выполнена первая аксиома нормы.
8. Вопрос. Является ли норма $\| A \| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2}$ подчиненной норме вектора?
   Ответ. Нет. Это норма Фробениуса, которая не подчинена никакой норме векторов.
   Действительно, по определению подчиненной нормы матрицы ($\| A \| = \sup_{\|x\|=1} \| Ax \|$) норма единичной матрицы должна равняться 1. В то же время, норма Фробениуса у единичной матрицы $n \times n$ равна $\sqrt{n}$.
9. Вопрос. При каком достаточном условии на норму матрицы B итерационный метод $x^{k+1} = Bx^k + c$ сходится с любого начального приближения?
   Ответ. При условии $\| B \| < 1$ для какой-либо нормы матрицы.
10. Вопрос. Почему приведенный итерационный процесс для уравнения $Ax = b$ не будет сходящимся при любых условиях на матрицы и итерационные параметры?
    $\frac{x^{k+1} - x^k + x^{k-1}}{\tau} + A\,x^k = b, \tau > 0$.
    Ответ. Допуститм, что он сходится, т.е. $x^k \to x^*$. Тогда предельным переходом при $k \to \infty$ получим, что x^* удовлетворяет уравнению
    $$\frac{x^*}{\tau} + A\,x^* = b.$$
11. Вопрос. Пусть итерации какого-либо итерационного метода сходятся к

точному решению СЛАУ в определенной норме. Сходятся ли они в какой-либо в любой другой норме?
Ответ. Да, при этом в любой другой норме, потому что в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны.

12. Вопрос. Метод верхней релаксации для СЛАУ $Ax = b$ сходится при любом параметре релаксации $\omega \in (0,2)$, если A является M-матрицей?
Ответ. Нет, достаточным для сходимости является условие, что A симметрична и положительно определена.
13. Вопрос. Проблема собственных значений – это задача отыскания собственных значений и собственных векторов произвольной квадратной матрицы?
Ответ. Нет, матрица квадратная.
14. Вопрос. Как связаны множества характеристических и собственных чисел матрицы?
Ответ. Они совпадают.
15. Вопрос. Сколько собственных чисел (с учетом кратности) имеет матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$?
Ответ. n собственных чисел.
16. Вопрос. Прямой степенной метод находит весь спектр матрицы?
Ответ Нет, он находит максимальное по модулю собственное число матрицы и со **Ответ**ствующий ему собственный вектор.
17. Вопрос. Метод Якоби применяют для решения полной проблемы собственных значений какой матрицы?
Ответ. Эрмитовой.
18. Вопрос. Метод Гаусса для СЛАУ с квадратной матрицей теоретически со **Ответ**ствует разложению матрицы на какие множители?
Ответ. Верхний и нижний треугольные.
19. Вопрос. Можно ли применить метод Гаусса без выбора ведущего элемента в случае матрицы с диагональным преобладанием?
Ответ. Да, при этом как в случае диагонального преобладание по строкам, так и по столбцам.
20. Вопрос. Метод прогонки для трехдиагональных матриц является прямым или итерационным?
Ответ: прямым.
21. Вопрос. Для СЛАУ с какими вещественными матрицами применим метод Холесского?
Ответ. С симметричными положительно определенными матрицами.
22. Вопрос. Метод QR-разложения матрицы состоит в её расщеплении на какие сомножители?
Ответ. Унитарную и верхнюю треугольную матрицы.
23. Вопрос. Какой метод может рассматриваться и как прямой и как

итерационный?
Ответ. Метод сопряженных градиентов.

24. Вопрос. Для СЛАУ с какими матрицами применяется метод наискорейшего спуска?
Ответ. С симметричными и положительно определенными.
25. Вопрос. Итерационный параметр в методе наискорейшего спуска задаётся заранее или вычисляется на каждой итерации?
Ответ. Вычисляется на каждой итерации.
26. Вопрос. Для СЛАУ с какими матрицами применяется метод сопряжённых градиентов?
Ответ. С симметричной положительно определенной матрицей.
27. Вопрос. Как определяется вектор невязки для уравнения $Ax = b$?
Ответ. $r = b - Ax$.
28. Вопрос. Итерационный метод Якоби сходится при условии, что матрица имеет строгое диагональное преобладание по строкам или по столбцам?
Ответ. В обоих случаях.
29. Вопрос. Что общего у итерационных методов Якоби, Гаусса-Зейделя и верхней релаксации и чем, с другой стороны, они отличаются от методов наискорейшего спуска и минимальных невязок?
Ответ. Вообще, все перечисленные методы относятся к классу одношаговых (в другой терминологии, двухслойных) – при вычислении текущей итерации используется только одна предыдущая.
Но первая группа методов – это методы координатной релаксации (координатного спуска), а вторые – это методы градиентной релаксации.
30. Вопрос. Чем отличается метод сопряженных градиентов от методов координатной релаксации, методов наискорейшего спуска и минимальных невязок?
Ответ. Метод сопряженных градиентов – двухшаговый (трехслойный), так как при вычислении текущей итерации используются две предыдущие.
31. Вопрос. Как определяется спектральный радиус произвольной квадратной матрицы $\rho(A)$?
Ответ. $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$, λ_i – это собственные числа матрицы A.
32. Вопрос. Чему равен спектральный радиус $\rho(A)$ в случае симметричной матрицы A?
Ответ. $\rho(A) = ||A||_2$
33. Вопрос. Какое неравенство связывает спектральный радиус матрицы и любую её подчиненную (операторную) норму?
Ответ. $\rho(A) \leq ||A||$
34. Вопрос. При практической реализации степенного метода прямой

итерации какая операция является основной?
Ответ. Операция умножения матрицы на вектор.

35. Вопрос. При практической реализации степенного метода обратной итерации какая операция является основной?
Ответ. Операция нахождения решения системы линейных уравнений.
36. Вопрос. $Q\,R$-алгоритм какие собственные числа матрицы находит?
Ответ. Все собственные числа матрицы. Это алгоритм решения полной проблемы собственных значений.
37. Вопрос. Какие ортогональные матрицы используются в методе Якоби для нахождения собственных чисел симметричной матрицы?
Ответ. Матрицы вращения (Гивенса).
38. Вопрос. Сколько обнуляется элементов на одном элементарном шаге метода вращений Гивенса?
Ответ. Обнуляется один элемент столбца под главной диагональю.
39. Вопрос. Сколько обнуляется элементов на одном элементарном шаге метода отражений Хаусхолдера?
Ответ. Обнуляются все элементы столбца под главной диагональю.
40. Вопрос. Что такое сингулярные числа вещественной матрицы A?
Ответ. Это арифметические квадратные корни из собственных чисел симметричной и неотрицательной матрицы $A^T A$.
41. Вопрос. Чему равны сингулярные числа симметричной и положительно определенной матрицы?
Ответ. Они совпадают с собственными числами этой матрицы.
42. Вопрос. Что из себя представляют матрицы в сингулярном разложении вещественной матрицы $A = U\Sigma V^T$?
Ответ. U и V — ортогональные матрицы, $|sigma$ – это матрица тех же размеров, что и A, у которой по главной диагонали стоят неотрицательные сингулярные числа A.
43. Вопрос. Пусть матрица A симметрична и положительно определена. Как определяется её произвольная степень A^α?
Ответ. Используем ортогональное разложение матрицы: $A = U\Lambda U^T$, где диагональная матрица Λ составлена из положительных собственных чисел A, а столбцы U – это ортонормированная система её собственных векторов. Тогда по определению
$$A^\alpha = U\Lambda^\alpha U^T.$$
44. Вопрос. Что называется псевдорешением СЛАУ $Ax = b$?
Ответ. Любая точка минимума квадратичной функции $\| Ax - b\|_2^2$, где $\| y\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |y_i|^2$ – евклидова норма.
45. Вопрос. Решением (решениями в общем случае) какой системы уравнений является псевдорешение СЛАУ $Ax = b$?

Ответ. $A^*Ax = A^*b$.

46. Вопрос. Что называется нормальным псевдорешением СЛАУ $Ax = b$?
    Ответ. Псевдорешение (т.е. решение системы $A^*Ax = A^*b$) с минимальной евклидовой нормой.
47. Вопрос. Как связаны ранги матрицы A и её сопряженной A^*?
    Ответ. $rankA = rankA^*$.
48. Вопрос. К какой СЛАУ приводит метод регуляризации Тихонова для решения $Ax = b$?
    Ответ. $A^*Ax + \alpha x = A^*b, \quad \alpha > 0$.
49. Вопрос. Куда сходится решение регуляризованной по Тихонову СЛАУ сходится при стремящемся к нулю параметре регуляризации?
    Ответ. К нормальному псевдорешению исходной СЛАУ (псевдорешению с минимальной евклидовой нормой).
50. Вопрос. Сколько положительных сингулярных чисел имеет матрица $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$?
    Ответ. Не более $\min\{n,m\}$ положительных сингулярных чисел.