федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Первый Московский государственный медицинский университет им. И.М. Сеченова
Министерства здравоохранения Российской Федерации
(Сеченовский Университет)

Методические материалы по дисциплине:

Функциональный анализ и вычислительная математика

Основная профессиональная образовательная программа высшего образования – программа специалитета.

12.05.01 Электронные и оптико-электронные приборы и системы специального назначения

1) Построить многочлен Лагранжа второй степени для случая $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $f_1 = 3$, $f_2 = 2$, $f_3 = 5$

Ответ: $2x^2 + x + 2$

2) Построить многочлен Лагранжа второй степени для случая $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $f_1 = 3$, $f_2 = 4$, $f_3 = 6$

Ответ: $x + 2$

3) Вычислить число обусловленности следующей матрицы в евклидовой норме: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$

Ответ: 56

4) Вычислить кубическую норму вектора $\vec{x} = (3 \quad -4 \quad 0)^T$

Ответ: 4

5) Вычислить октоэдрическую норму вектора $\vec{x} = (3 \quad -4 \quad 0)^T$

Ответ: 7

6) Вычислить Евклидову норму вектора $\vec{x} = (3 \quad -4 \quad 0)^T$

Ответ: 5

7) Вычислить кубическую норму матрицы $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

Ответ: 9

8) Вычислить октоэдрическую норму матрицы $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

Ответ: 8

9) Вычислить Евклидову норму норму матрицы $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ответ: 4

10) Вычислить число обусловленности следующей матрицы в кубической норме: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

Ответ: 7/3

11) Вычислить число обусловленности следующей матрицы в октоэдрической норме: $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

Ответ: 7/3

12) Рассматривается система линейных алгебраических уравнений вида $Ax = f$. Вектор f пока не задан. Пусть норма матриц A и A^{-1} известны. Чему равно минимально возможное число обусловленности системы?

Ответ: 1

13) Рассматривается система линейных алгебраических уравнений вида $Ax = f$. Вектор f пока не задан. Пусть норма матриц A и A^{-1} известны.

Чему равно максимально возможное число обусловленности системы?
Ответ: Числу обусловленности матрицы, то есть $\|A\| \left\|A^{-1}\right\|$

14) Методом наименьших квадратов решить переопределенную систему уравнений $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=2 \\ x+2y=3 \end{cases}$. Ответ записать в виде обыкновенных дробей через пробел (сначала значение x, потом значение y)
Ответ: -3/4 7/8

15) Для системы $Ax = f$ найти оптимальное значение итерационного параметра (регулятора сходимости) в методе простой итерации Ричардсона. Ответ дать в виде обыкновенной дроби
Ответ: 2/9

16) Пусть собственные числа матрицы A равны 3/11 и 4/11 . Чему равны собственные числа матрицы $E - 2A$, где E −единичная матрица. Числа записать через пробел в виде обыкновенных дробей от меньшего числа к большему.
Ответ: 3/11 5/11

17) Необходимое и достаточное условие сходимости метода Якоби для системы уравнений с матрицей $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, где α и β положительные числа может быть записано в виде: $\frac{\beta}{\alpha} < c$, где c – это целое число. Чему равно c?
Ответ: 1

18) Необходимое и достаточное условие сходимости метода Зейделя для системы уравнений с матрицей $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, где α и β положительные числа может быть записано в виде: $\frac{\beta^2}{\alpha^2} < c$, где c – это целое число. Чему равно c?
Ответ: 1

19) Построить наилучшее среднеквадратичное приближение на отрезке [0; 1] функции $f(x) = x^2$ с помощью линейной комбинации функций $q(x) = 1$ и $p(x) = x$ с единичной весовой функцией. То есть $Aq(x) + Bp(x)$ Ответ дать в виде значений констант A и B через пробел
Ответ: -1/6 1

20) Чему равен многочлен Чебышева $T_0(x)$ первого рода?
Ответ: 1

21) Чему равен многочлен Чебышева $T_1(x)$ первого рода?

Ответ: x

22) Чему равен многочлен Чебышева $T_2(x)$ первого рода?

Ответ: $2x^2 - 1$

23) Чему равен многочлен Чебышева $T_3(x)$ первого рода?

Ответ: $4x^3 - 3x$

24) Написать реккурентную формулу определения многочлена Чебышева $T_{n+1}(x)$ через $T_n(x)$ и $T_{n-1}(x)$. Ответ записать в виде $T_{n+1}(x) = A(x)\,T_n(x) + B(x)\,T_{n-1}(x)$, где написать чему равны функции $A(x), B(x)$.

Ответ: $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$

25) Написать формулу определения многочлена Чебышева $T_n(x)$ через . функции $\cos(\cdot)$ и $arc\cos(\cdot)$.

Ответ: $T_n(x) = cos(n\arccos(x))$

26) Численное интегрирование на отрезке [a; b] функции $f(x)$ осуществляется с использованием формулы прямоугольников с произвольной точкой. Погрешность такого способа численного интегрирования может быть оценена выражением $\varepsilon = \frac{1}{c} M_1 (b-a)\,h$, где $M_j = \max\limits_{z\in[a;b]} \left|f^{(j)}(z)\right|$. Чему равна величина c?

Ответ: 2

27) Численное интегрирование на отрезке [a; b] функции $f(x)$ осуществляется с использованием формулы прямоугольников с центральной точкой. Погрешность такого способа численного интегрирования может быть оценена выражением $\varepsilon = \frac{1}{c} M_2 (b-a)\,h^2$, где $M_j = \max\limits_{z\in[a;b]} \left|f^{(j)}(z)\right|$. Чему равна величина c?

Ответ: 24

28) Численное интегрирование на отрезке [a; b] функции $f(x)$ осуществляется с использованием формулы трапеций. Погрешность такого способа численного интегрирования может быть оценена выражением $\varepsilon = \frac{1}{c} M_2 (b-a)\,h^2$, где $M_j = \max\limits_{z\in[a;b]} \left|f^{(j)}(z)\right|$. Чему равна величина c?

Ответ: 12

29) Численное интегрирование на отрезке [a; b] функции $f(x)$ осуществляется с использованием формулы Симпсона (с использованием сдвоенных отрезков). Погрешность такого способа численного интегрирования может быть оценена выражением $\varepsilon = \frac{1}{c} M_4 (b-a)\,h^4$, где $M_j = \max\limits_{z\in[a;b]} \left|f^{(j)}(z)\right|$. Чему равна величина c?

Ответ: 180

30) Для численного интегрирования функции $f(x)$ на отрезке [-1; 1] используется формула Гаусса. Чему равны коэффициенты в формуле Гаусса? Ответ написать в виде целых чисел через пробел от меньшего к большему

Ответ: 1 1

31) Для численного интегрирования функции $f(x)$ на отрезке [-1; 1] используется формула Гаусса. Чему равны координаты узлов в формуле Гаусса? Ответ написать в виде дробей с использованием квадратных корней в знаменателях дробей через пробел от меньшего к большему

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{1}{\sqrt{3}}$

32) Построить линейный многочлен вида $p(x) = A + Bx$ наилучшего равномерного приближения степени $n = 1$ для $f(x) = x^2$ на [-1; 1]. Написать через пробел значения констант A и B через пробел. Число A записать в виде десятичной дроби. Число B записать в виде целого числа.

Ответ: 0.5 0

33) Какие максимальные значения принимает функция разности между исходной функцией и многочленом наилучшего равномерного приближения на отрезке [-1; 1]? Ответ записать в виде целого числа.

Ответ: 1

34) Какие минимальные значения принимает функция разности между исходной функцией и многочленом наилучшего равномерного приближения на отрезке [-1; 1]? Ответ записать в виде целого числа.

Ответ: -1

35) Как называются абсциссы координат точек, в которых функция разности между исходной функцией и многочленом наилучшего равномерного приближения на отрезке [-1; 1] принимает наименьшие и наибольшие значения? Ответ записать в виде фразы “точки XXX”, где место вместо XXX написать одно слово.

Ответ: точки альтернанса

36) Чему равен порядок аппроксимации метода Рунге-Кутты, заданного таблицей Бутчера $\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$? Ответ дать в виде целого числа

Ответ: 1

37) Чему равен порядок аппроксимации метода Рунге-Кутты, заданного

таблицей Бутчера $\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 \end{array}$? Ответ дать в виде целого числа

Ответ: 1

38) Чему равен порядок аппроксимации метода Рунге-Кутты, заданного таблицей Бутчера $\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$? Ответ дать в виде целого числа

Ответ: 2

39) Чему равен порядок аппроксимации метода Рунге-Кутты, заданного таблицей Бутчера $\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$? Ответ дать в виде целого числа

Ответ: 2

40) Чему равен порядок аппроксимации метода Рунге-Кутты, заданного таблицей Бутчера $\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 0 & 3/4 \end{array}$? Ответ дать в виде целого числа

Ответ: 3

41) Чему равен порядок аппроксимации метода Рунге-Кутты, заданного таблицей Бутчера $\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ \hline & 2/8 & 3/8 & 3/8 \end{array}$? Ответ дать в виде целого числа

Ответ: 3

42) Чему равен порядок аппроксимации метода Рунге-Кутты, заданного таблицей Бутчера $\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ \hline & 2/8 & 3/8 & 3/8 \end{array}$? Ответ дать в виде целого числа

Ответ: 2

43) Какой порядок у формулы Адамса $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$? Ответ дать в виде целого числа

Ответ: 2

44) Какой порядок у формулы Адамса $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$? Ответ дать в виде целого числа

Ответ: 2

45) Какой порядок у формулы Адамса $y_{n+1} = y_n + hf_n$? Ответ дать в виде целого числа

Ответ: 1

46) Какой порядок у формулы Адамса $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$? Ответ дать в виде целого числа

Ответ: 3

47) Какой порядок у формулы Адамса $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$? Ответ дать в виде целого числа

Ответ: 4

48) Какой порядок точности формулы численного дифференцирования $f'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$, если функция непрерывно дифференцируема бесконечное число раз . ответ написать в виде целого числа

Ответ: 1

49) Какой порядок точности формулы численного дифференцирования $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, если функция непрерывно дифференцируема бесконечное число раз . ответ написать в виде целого числа

Ответ: 1

50) Какой порядок точности формулы численного дифференцирования $f'(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$, если функция непрерывно дифференцируема бесконечное число раз . ответ написать в виде целого числа

Ответ: 2