федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
Первый Московский государственный медицинский университет им. И.М. Сеченова Министерства здравоохранения Российской Федерации (Сеченовский Университет)

Кафедра высшей математики, механики и математического моделирования

Методические материалы по дисциплине:

Функциональный анализ и вычислительная математика

основная профессиональная образовательная программа высшего образования - программа бакалавриата

01.03.03 Механика и математическое моделирование

1. Зависит ли результат вычислений от выбора вычислительного алгоритма?

    a. Нет.

    b. Да.

    c. Да, при этом результат зависит от порядка выполнения операций. (правильно)

    d. Да, при этом результат не зависит от порядка выполнения операций.

2. Что такое машинный ноль?

    a. Число ε_M для которого $1 + \varepsilon_M = 1$. (правильно)

    b. Число ε_M для которого $\varepsilon_M = 0$.

    c. Число ε_M для которого $\| \varepsilon_M| < \varepsilon$, где ε — заданное пользователем маленькое число.

    d. Число, стремящееся к нулю при стремлении длины мантиссы к бесконечности.

3. Пусть x и x^* — соответственно точное и приближённое значение некоторой величины. Тогда $\Delta(x^*)$ называется абсолютной погрешностью приближённого значения x^*, если она удовлетворяет условию

    a. $\| x - x^* \| \leq \Delta(x^*)$ (правильно)

    b. $\frac{\|x-x^*\|}{\|x\|} \leq \Delta(x^*)$

    c. $\frac{\|x-x^*\|}{\|x+x^*\|} \leq \Delta(x^*)$

    d. $\frac{\|x^*\|}{\|x\|} \leq \Delta(x^*)$

4. Пусть x и x^* — соответственно точное и приближённое значение некоторой величины. Тогда $\delta(x^*)$ называется относительной погрешностью приближённого значения x^*, если она удовлетворяет условию

    a. $\| x^* - x \| \leq \delta(x^*) \leq \| x^* + x \|$

    b. $\frac{\|x-x^*\|}{\|x^*\|} \leq \delta(x^*)$ (правильно)

    c. $\frac{\|x+x^*\|}{\|x-x^*\|} \leq \delta(x^*)$

    d. $\frac{\|x^*\|}{\|x\|} \geq \delta(x^*)$

5. Какое из перечисленных свойств не входит в определение нормы вектора?

    a. $||\vec{x} \cdot \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| \, ||\vec{y}||$(правильно)

    b. $||\alpha\vec{x}|| = \| \alpha \| \, ||\vec{x}||$

    c. $||\vec{x} + \vec{y}|| \leq ||\vec{x}|| + ||\vec{y}||$

d. $||\vec{x}|| \geq 0$

6. Какое из перечисленных свойств не входит в определение нормы матрицы?

   a. $||A \cdot B|| \leq ||A||\,||B||$

   b. $||\alpha A|| = \| \alpha \| \, ||A||$

   c. $||A - B|| \leq ||A + B||$ (правильно)

   d. $||A|| \geq 0$

7. Можно ли считать выражение $\max \| x_j \|$ нормой вектора $\vec{x} = \{x_j\}$?

   a. Да (правильно)

   b. Нет

   c. Да, но только если $x_j \geq 0$

   d. Да, но только если $\max \| x_j \| \leq \sum x_j^2$

8. Метод прогонки является

   a. Формализацией метода Гаусса без выбора главного элемента для систем уравнений с трёхдиагональной матрицей. (правильно)

   b. Формализацией метода Гаусса с выбором главного элемента по строке.

   c. Формализацией метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

   d. Не относится ни к одному из приведённых случаев.

9. Какой из перечисленных методов решения систем линейных алгебраических уравнений не является итерационным?

   a. Метод ортогонализации по строкам. (правильно)

   b. Метод Якоби.

   c. Метод Гаусса-Зейделя.

   d. Метод простой итерации.

10. Итерационный процесс $\vec{x}^{n+1} = P\vec{x}^{n} + \vec{c}$ сходится тогда и только тогда, когда

    a. Все собственные числа матрицы P по модулю меньше единицы. (правильно)

    b. Матрица P верхнетреугольная.

    c. Матрица P трехдиагональная.

    d. Матрица P ортогональная и все её собственные числа по модулю меньше единицы.

11. Итерационный процесс $\vec{x}^{n+1} = P\vec{x}^{n} + \vec{c}$ сходится если

a. Матрица P самосопряжённая, положительно определённая и все её собственные числа меньше единицы. (правильно)

b. Матрица P ортогональная.

c. Матрица P трёхдиагональная без диагонального преобладания.

d. Матрица P верхнетреугольная и $||\vec{c}|| < 1$.

12. Пусть матрица A системы линейных алгебраических уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$ представлена в виде $A = L + D + R$, где L - нижнетреугольная часть матрицы A с нулевой диагональю, R - верхнетреугольная часть матрицы B с нулевой диагональю, D - диагональ матрицы A с нулевыми элементами, лежащими вне диагонали, E - единичная матрица, τ - действительное положительное число. Какой из перечисленных ниже итерационных методов является методом Гаусса-Зейделя?

a. $\vec{x}^{n+1} = -(L + D)^{-1}(R\vec{x}^n - \vec{b})$ (правильно)

b. $\vec{x}^{n+1} = -D^{-1}((L + R)\vec{x}^n - \vec{b})$

c. $\vec{x}^{n+1} = (E - \tau A)\vec{x}^n + \tau\vec{b}$

d. $\vec{x}^{n+1} = A^{-1}\vec{x}^n + \vec{b}$

13. В методе половинного деления погрешность на каждом шаге уменьшается в

a. 2 раза (правильно)

b. 3 раза

c. зависит от величины отрезка локализации

d. заранее нельзя определить

14. Итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ для нахождения точного значения x_* имеет порядок сходимость n, если

a. $\varphi'(x_*) = \varphi''(x_*) = \cdots = \varphi^{(n-1)}(x_*) = 0,\ \varphi^{(n)}(x_*) \neq 0$ (правильно)

b. $\varphi'(x_*) = \varphi''(x_*) = \cdots = \varphi^{(n)}(x_*) = 0,\ \varphi^{(n+1)}(x_*) \neq 0$

c. $\varphi'(x_*) > 0,\ \varphi''(x_*) > 0,\ \dots, \varphi^{(n-1)}(x_*) > 0, \varphi^{(n)}(x_*) = 0$

d. $\varphi'(x),\ \varphi''(x),\ \dots, \varphi^{(n-1)}(x)$ непрерывны в окрестности x_*, $\varphi^{(n)}(x_*) = 0$

15. Итерационный процесс $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ при выполнении в области локализации условия $\| \varphi'(\xi) \| < 1$

a. сходится при любом начальном приближении. (правильно)

b. не сходится.

c. может как быть, так и не быть сходящимся.

d. сходится только при начальном приближении, выбранном в малой окрестности предельной точки.

16. По теореме Декарта число положительных действительных корней многочлена с учётом их кратности равно

   a. либо числу перемен знаков в последовательности его ненулевых коэффициентов, либо меньше этого числа на чётное число. (правильно)

   b. числу перемен знаков в последовательности его ненулевых коэффициентов, либо меньше этого числа на нечётное число.

   c. числу перемен знаков в последовательности его коэффициентов.

   d. числу неотрицательных коэффициентов.

17. При каком значении α итерационный метод $x_{n+1} = x_n - \alpha(e^{x_n} - x_n^2)$ будет сходящимся в окрестности корня $x_* \approx -0.7$?

   a. 0.5 (правильно)

   b. 1.5

   c. -0.5

   d. -1.5

18. Локализация действительных корней нелинейного уравнения это

   a. указание таких интервалов, каждому из которых принадлежит только один действительный корень уравнения. (правильно)

   b. указание такого интервала, которому принадлежат все действительные корни уравнения.

   c. указание таких интервалов, которым принадлежат либо все положительные, либо все отрицательные корни уравнения.

   d. построение множества интервалов, содержащих действительный корень уравнения.

19. Какой из итерационных процессов не является методом простой итерации для нахождения корней уравнения $x = ctg(x)$

   a. $x_{n+1} = \frac{7}{2}x_n + \frac{7}{5}arcctg(x_n)$ (правильно)

   b. $x_{n+1} = \frac{4}{9}x_n + \frac{5}{9}arcctg(x_n)$

   c. $x_{n+1} = 2arcctg(x_n) - x_n$

   d. $x_{n+1} = ctg(x_n)$

20. Какой из итерационных процессов не является методом простой итерации для нахождения корней уравнения $e^x = x^2$?

   a. $x_{n+1} = \sqrt{e^{x_n}}$ (правильно)

   b. $x_{n+1} = 2\ln \| x_n \|$

c. $x_{n+1} = \frac{e^{x_n}}{x_n}$

d. $x_{n+1} = x_n - \alpha(e^{x_n} - x_n^2)$, где α - действительное число

21. Какой из итерационных процессов является методом Ньютона для нахождения корней уравнения $e^x = x^2$?

a. $x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - x_n^2}{e^{x_n} - 2x_n}$ (правильно)

b. $x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - 2x_n}{e^{x_n} - x_n^2}$

c. никакой

d. никакой

22. Определить максимально возможное количество отрицательных корней многочлена $33x^3 + 22x^2 - 11x + 5$

a. 1 (правильно)

b. 2

c. отрицательных корней нет

d. 3

23. Погрешность интерполяции с постоянным шагом h алгебраическим многочленом степени n оценивается по формуле

a. $\frac{M_{n+1}h^{n+1}}{n+1}$, где M_{n+1} - максимум модуля (n+1) производной интерполируемой функции на отрезке интерполяции (правильно)

b. $\frac{M_{n+1}h^{n+1}}{n+1}$, где M_{n+1} - максимум (n+1) производной интерполируемой функции на отрезке интерполяции

c. $\frac{M_{n+1}h^{n+1}}{(n+1)!}$, где M_{n+1} - максимум модуля (n+1) производной интерполируемой функции на отрезке интерполяции

d. $\frac{M_n h^n}{n}$, где M_n - максимум модуля n производной интерполируемой функции на отрезке интерполяции

24. Сколько различных алгебраических интерполяционных многочленов степени $n - 1$ можно построить для функции, значения которой заданы в n точках?

a. 1 (правильно)

b. n

c. $n + 1$

d. бесконечно много

25. В каком количестве точек необходимо задать значения функции для построения единственного интерполяционного алгебраического многочлена степени n

    a. $n-1$ (правильно)

    b. n

    c. $n+1$

    d. не менее n

26. Какая из формул позволяет оценить погрешность при нахождении приближённого значения интеграла $\int_a^b f(x)dx$ методом прямоугольников с центральной точкой?

    a. $\frac{b-a}{24}\max_{x\in[a,b]}\|f''\|h^2$ (правильно)

    b. $\frac{b-a}{12}\max_{x\in[a,b]}\|f''\|h^2$

    c. $\frac{b-a}{24}\max_{x\in[a,b]}\|f'\|h$

    d. $\frac{b-a}{2}\max_{x\in[a,b]}\|f''\|h^2$

27. Какая из формул позволяет оценить погрешность при нахождении приближённого значения интеграла $\int_a^b f(x)dx$ методом трапеций?

    a. $\frac{b-a}{12}\max_{x\in[a,b]}\|f''\|h^2$ (правильно)

    b. $\frac{b-a}{24}\max_{x\in[a,b]}\|f''\|h^2$

    c. $\frac{b-a}{12}\max_{x\in[a,b]}\|f'\|h$

    d. $\frac{b-a}{8}\max_{x\in[a,b]}\|f''\|h^2$

28. Формула метода прямоугольников с центральной точкой для нахождения приближённого значения интеграла $\int_a^b f(x)dx$ имеет вид

    a. $\sum_{k=1}^{n} f(x_k-\frac{h}{2})h,\ x_k=a+kh,\ h=\frac{b-a}{n}$ (правильно)

    b. $\sum_{k=0}^{n} f(x_k-\frac{h}{2})h,\ x_k=a+kh,\ h=\frac{b-a}{n}$

    c. $\sum_{k=1}^{n} f(x_k+\frac{h}{2})h,\ x_k=a+kh,\ h=\frac{b-a}{n}$

    d. $\sum_{k=1}^{n}(f(x_k-h)+f(x_k))\frac{h}{2},\ x_k=a+kh,\ h=\frac{b-a}{n}$

29. Формула метода трапеций для нахождения приближённого значения интеграла $\int_a^b f(x)dx$ имеет вид

a. $\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k-h)+f(x_k)}{2} h,\ x_k = a + kh,\ h = \frac{b-a}{n}$ (правильно)

b. $\sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k-h)+f(x_k)}{2} h,\ x_k = a + kh,\ h = \frac{b-a}{n}$

c. $\sum_{k=1}^{n} f\,(x_k + \frac{h}{2})h,\ x_k = a + kh,\ h = \frac{b-a}{n}$

d. $\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_k+h)-f(x_k-h)}{2} h,\ x_k = a + kh,\ h = \frac{b-a}{n}$

30. Какая из формул численного дифференцирования не подходит для приближённого вычисления $f'(x)$?

a. $\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-2h)}{h^2}$ (правильно)

b. $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

c. $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

d. $\frac{f(x)-f(x-2h)}{2h}$

31. Формула трапеций для приближенного вычисления интеграла дает точный результат для

a. всех многочленов степени не выше первой. (правильно)

b. всех многочленов степени не выше второй.

c. всех многочленов с коэффициентом при старшей степени равным единице.

d. точный результат не даёт ни при каких условиях.

32. Метод парабол (Симпсона) для приближенного вычисления интеграла дает точный результат для

a. всех многочленов степени не выше второй.

b. всех многочленов степени не выше первой и для всех тригонометрических функций.

c. всех многочленов с коэффициентом при старшей степени равным единице.

d. точный результат не даёт ни при каких условиях.

33. Наилучшую точность численного интегрирования обеспечивает

a. метод парабол (Симпсона). (правильно)

b. метод прямоугольников с центральной точкой.

c. метод трапеций.

d. метод прямоугольников.

34. Наилучшая точность численного интегрирования при использовании одного и того же метода и одинакового количества узлов для одной и той же подинтегральной функции достигается при

   a. замене переменных, которая переводит отрезок интегрирования в отрезок $[-1,1]$ и использовании в качестве узлов сетки нулей многочлена Чебышева. (правильно)

   b. использовании равномерной сетки.

   c. результат не зависит от расположения узлов.

   d. в качестве узлов следует брать различные корни уравнения $sin(Nx) = 0$, где N – число узлов.

35. Выберите верное утверждение.

   a. Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи в узлах сетки. При этом сходимость имеет тот же порядок, что и аппроксимация. (правильно)

   b. Из устойчивости и сходимости следует аппроксимация разностной задачей дифференциальной задачи. При этом сходимость имеет тот же порядок, что и аппроксимация.

   c. Из аппроксимации и устойчивости следует сходимость решения разностной задачи к решению дифференциальной задачи в узлах сетки. При этом порядок сходимости больше порядка аппроксимации на единицу.

   d. Все утверждения неверные.

36. Для решения задачи Коши $y' = f(x, y), y(-1) = 1, x \in [-1,3]$ выберите численный метод с наибольшим порядком аппроксимации.

   a. $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

      $k_1 = f(x_n, y_n), k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1),$

      $k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2), k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$ (правильно)

   b. $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$

      $k_1 = f(x_n, y_n), k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1),$

      $k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2), k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$

   c. $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

   d. $y_{n+1} = y_n + h(k_1 + k_2)/2\ k_1 = f(x_n, y_n), k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$

37. Для решения задачи Коши $y' = f(x, y), y(0) = 0, x \in [0,1]$ выберите численный метод с наибольшим порядком аппроксимации.

a. $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3)$

$k_1 = f(x_n, y_n), k_2 = f(x_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}k_1),$

$k_3 = f(x_n + \frac{2h}{3}, y_n + \frac{2h}{3}k_2)$

b. $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$

$k_1 = f(x_n, y_n), k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1),$

$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2), k_4 = f(x_n + h, hk_3)$

c. $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 - 2k_3 + k_4)$

$k_1 = f(x_n, y_n), k_2 = f(x_n, y_n + hk_1),$

$k_3 = f(x_n + h, y_n + hk_2), k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$

d. $y_{n+1} = y_n + h(k_1 + k_2)/2$

$k_1 = f(x_n, y_n), k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$

38. Для решения задачи Коши $y' = f(x, y), y(-2) = 3, x \in [-2{,}5]$ выберите численный метод с наибольшим порядком аппроксимации.

a. $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$k_1 = f(x_n, y_n), k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1),$

$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2), k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$

b. $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$

$k_1 = f(x_n, y_n), k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1),$

$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2), k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$

c. $y_{n+1} = y_n + hk_2$

$k_1 = f(x_n, y_n), k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$

d. $y_{n+1} = y_n + h(k_1 + k_2)/2$

$k_1 = f(x_n, y_n), k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$

39. Приближение функции $f(x)$ ищется в виде $g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$, где $\varphi_i(x)$ - фиксированные функции, а коэффициенты a_i определяются из условия совпадения функций $f(x)$ и $g(x)$ в узлах $x_j, j = 0,1, \dots, n$. Как называется такой способ приближения?

a. Интерполяция (правильно)

b. Интерполяция с кратными узлами

c. Сплайн-интерполяция

d. Наилучшее равномерное приближение

40. Приближение функции $f(x)$ ищется в виде $g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$, где $\varphi_i(x)$ - фиксированные функции, а коэффициенты a_i определяются из условия совпадения функций $f(x)$ и $g(x)$ и значений их производных до некоторого порядка в узлах $x_j, j = 0,1, \dots, n$. Как называется такой способ приближения?

a. Интерполяция

b. Интерполяция с кратными узлами (правильно)

c. Сплайн-интерполяция

d. Наилучшее равномерное приближение

41. Приближение функции $f(x)$ ищется в виде $g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_i(x)$, где $\varphi_i(x)$ - фиксированные функции, а коэффициенты a_i определяются из условия, чтобы величина $\delta = \int_a^b \rho(x)(f(x) - g(x))^2$ dx, где $\rho(x)$ - заданная положительная и интегрируемая функция, была минимальна. Как называется такой способ приближения?

a. Интерполяция

b. Интерполяция с кратными узлами

c. Сплайн-интерполяция

d. Среднеквадратичное приближение (правильно)

42. Приближение функции $f(x)$ ищется в виде функции, совпадающей с $f(x)$ в узлах $x_j, j = 0, \dots, n$ и являющейся многочленом степени 3 на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n$ и удовлетворяющей условиям непрерывности производных до порядка 2 в точках $x_j, j = 1, \dots, n-1$. Как называется такой способ приближения?

a. Интерполяция

b. Интерполяция с кратными узлами

c. Сплайн-интерполяция(правильно)

d. Среднеквадратичное приближение

43. Приближение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ ищется на множестве функций вида $g_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. В качестве приближения выбирается функция $\bar{g}_n(x)$, такая, что $max_{[a,b]}|f(x) - \bar{g}_n(x)| \leq max_{[a,b]}|f(x) - g_n(x)|$ для любого $g_n(x)$. Как называется такой способ приближения?

a. Интерполяция

b. Интерполяция с кратными узлами

c. Сплайн-интерполяция

d. Наилучшее равномерное приближение (правильно)

44. Укажите номер формулы, которая является остаточным членом интерполяционного полинома Лагранжа степени n, построенного по узлам $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$.

a. $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n), \xi \in [a,b]$ (правильно)

b. $\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n), \xi \in [a,b]$

c. $\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(n)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n), \xi \in [a,b]$

d. $\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n), \xi \in [a,b]$

45. Укажите номер формулы, которая устанавливает связь между разделенной разностью k-го порядка и производной.

a. $f(x_0,x_1,\dots,x_k) = \frac{f^{(k-1)}(\xi)}{k!}, \xi \in [a,b]$.

b. $f(x_0,x_1,\dots,x_k) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}, \xi \in [a,b]$.

c. $f(x_0,x_1,\dots,x_k) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{k!}, \xi \in [a,b]$.

d. $f(x_0,x_1,\dots,x_k) = \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}, \xi \in [a,b]$.

46. Приближение функции $f(x)$ ищется в виде многочлена $L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i$, коэффициенты a_i определяются из условия совпадения функций $f(x)$ и $L_n(x)$ в различных узлах $i = 0,1,\dots,n$. Такой способ приближения называется

a. интерполяцией Лагранжа (правильно)

b. сплайн-интерполяцией

c. наилучшим приближением

d. интерполяцией Эрмита

47. Укажите номер формулы, которая определяет остаточный член интерполяционного алгебраического многочлена степени n, построенного по узлам $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b, \xi \in [a,b]$

a. $f(x,x_0,x_1,\dots,x_n)(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ (правильно)

b. $\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

c. $\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

d. $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n-1)!}(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$

48. Пусть $L_2(x)$ есть интерполяционный алгебраический многочлен степени 2 функции $f(x) = x^3 - x, x \in [-1,1]$, построенный по узлам $x = -1,0,1$. Укажите верное утверждение.

    a. $L_2(x) = 0$ (правильно)

    b. $L_2(x) = 1$

    c. $L_2(x) = x^2 - x$

    d. $L_2(1) = 3$

49. Пусть $T_n(x)_{n=0}^{\infty}$ система полиномов Чебышева на отрезке $[-1,1]$. Укажите верное утверждение.

    a. Корни полинома $T_n(x)$ принадлежат интервалу $(-1,1)$.

    b. Корни полинома $T_n(x)$ положительны.

    c. Среди корней полинома $T_n(x)$ есть кратные.

    d. Полиномы $T_{2n}(x)$ нечетные функции.

50. Алгоритм построения интерполяционного кубического сплайна требует …

    a. Порядка $O(n)$ арифметических операций.

    b. Решения системы линейных алгебраических уравнений с квадратной заполненной матрицей общего вида.

    c. Решения системы линейных алгебраических уравнений с треугольной матрицей.

    d. Порядка $O(n^3)$ арифметических операций.

51. Укажите формулу, подходящую для оценки остаточного члена при приближенном вычислении первой производной функции $f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

    a. $\frac{h}{2}f''(\xi)$

    b. $\frac{h^2}{6}f'''(\xi)$ (правильно)

    c. $\frac{h^3}{12}f'''(\xi)$

    d. $\frac{h^3}{124}f''''(\xi)$

52. Укажите формулу, подходящую для оценки остаточного члена при приближенном вычислении первой производной функции $f'(x) \approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$

    a. $\frac{h}{2}f''(\xi)$ (правильно)

b. $\frac{h^2}{6} f'''(\xi)$

c. $\frac{h^3}{12} f'''(\xi)$

d. $\frac{h^3}{124} f''''(\xi)$

53. Укажите формулу, подходящую для оценки остаточного члена при приближенном вычислении второй производной функции $f''(x) \approx \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$

a. $\frac{h}{2} f''(\xi)$

b. $\frac{h^2}{6} f'''(\xi)$

c. $\frac{h^2}{12} f''''(\xi)$ (правильно)

d. $\frac{h^3}{124} f'''(\xi)$

54. Для того, чтобы квадратурная формула с n узлами была интерполяционной необходимого и достаточно, чтобы

a. она была точной для любого полинома степени n.

b. она была точной для любого полинома степени n-1. (правильно)

c. она была точной для любого полинома степени n+1.

d. она была точной для любого полинома степени n-2.

55. Для того, чтобы квадратурная формула с n узлами была интерполяционной необходимого и достаточно, чтобы

a. она была точной для любого полинома степени n.

b. она была точной для любого полинома степени n-1. (правильно)

c. она была точной для любого полинома степени 2n.

d. она была точной для любого полинома степени 2n+1.

56. Укажите квадратурную формулу метода прямоугольников.

a. $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(a)$ (правильно)

b. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$

c. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{a+b}{2}(f(b)-f(a))$

d. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$

57. Укажите квадратурную формулу метода прямоугольников с центральной точкой.

a. $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$ (правильно)

b. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$

c. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{a+b}{2}(f(b)-f(a))$

d. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$

58. Укажите квадратурную формулу метода трапеций.

a. $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$

b. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$

c. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{a+b}{2}(f(b)-f(a))$ (правильно)

d. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$

59. Укажите квадратурную формулу метода парабол (Симпсона).

a. $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$

b. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$

c. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{a+b}{2}(f(b)-f(a))$

d. $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))$ (правильно)

60. Укажите формулу для оценки погрешности при вычислении определенного интеграла методом прямоугольников.

a. $\frac{(b-a)^2}{2}\max\limits_{[a,b]}|f'(x)|$ (правильно)

b. $\frac{(b-a)^3}{24}\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$

c. $\frac{(b-a)^3}{12}\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$

d. $\frac{(b-a)^5}{2880}\max\limits_{[a,b]}|f^{IV}(x)|$

61. Укажите формулу для оценки погрешности при вычислении определенного интеграла методом прямоугольников с центральной точкой.

a. $\frac{(b-a)^2}{2}\max\limits_{[a,b]}|f'(x)|$

b. $\frac{(b-a)^3}{24}\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$ (правильно)

c. $\frac{(b-a)^3}{12}\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$

d. $\frac{(b-a)^5}{2880}\max_{[a,b]}|f^{IV}(x)|$

62. Укажите формулу для оценки погрешности при вычислении определенного интеграла методом трапеций.

a. $\frac{(b-a)^2}{2}\max_{[a,b]}|f'(x)|$

b. $\frac{(b-a)^3}{24}\max_{[a,b]}|f''(x)|$

c. $\frac{(b-a)^3}{12}\max_{[a,b]}|f''(x)|$ (правильно)

d. $\frac{(b-a)^5}{2880}\max_{[a,b]}|f^{IV}(x)|$

63. Укажите формулу для оценки погрешности при вычислении определенного интеграла методом Симпсона (парабол).

a. $\frac{(b-a)^2}{2}\max_{[a,b]}|f'(x)|$

b. $\frac{(b-a)^3}{24}\max_{[a,b]}|f''(x)|$

c. $\frac{(b-a)^3}{12}\max_{[a,b]}|f''(x)|$

d. $\frac{(b-a)^5}{2880}\max_{[a,b]}|f^{IV}(x)|$ (правильно)

64. Укажите верное утверждение для квадратурных формул Ньютона-Котеса.

a. Узлы квадратурной формулы расположены равномерно на отрезке [a,b]. (правильно)

b. Узлы квадратурной формулы являются корнями полинома Чебышева.

c. Узлы квадратурной формулы есть корни ортогонального полинома степени n.

d. Квадратура точна на любом полиноме степени 2n.

65. Укажите верное утверждение для квадратурных формул Ньютона-Котеса.

a. Квадратура точна на любом полиноме степени n-1. (правильно)

b. Узлы квадратурной формулы являются корнями полинома Чебышева.

c. Узлы квадратурной формулы есть корни ортогонального полинома степени n.

d. Квадратура точна на любом полиноме степени 2n-1.

66. Укажите верное утверждение для квадратурных формул Ньютона-Котеса.

a. Квадратура является интерполяционной. (правильно)

b. Узлы квадратурной формулы являются корнями полинома Чебышева.

c. Узлы квадратурной формулы есть корни ортогонального полинома степени n.

d. Квадратура точна на любом полиноме степени 2n-1.

67. Укажите верное утверждение для квадратурных формул Гаусса.

a. Узлы квадратурной формулы есть корни ортогонального полинома степени n. (правильно)

b. Квадратура точна на любом полиноме степени 2n+1.

c. Квадратура точна на любом полиноме степени 2n.

d. Квадратура не является интерполяционной.

68. Укажите верное утверждение для квадратурных формул Гаусса.

a. Квадратура точна на любом полиноме степени 2n-1. (правильно)

b. Узлы квадратуры равномерно распределены по отрезку интегрирования.

c. Квадратура точна на любом полиноме степени 2n.

d. Квадратура не является интерполяционной.

69. Укажите верное утверждение для квадратурных формул Гаусса.

a. Коэффициенты квадратурной формулы положительны. (правильно)

b. Узлы квадратуры равномерно распределены по отрезку интегрирования.

c. Квадратура точна на любом полиноме степени 2n.

d. Квадратура точна на любом полиноме степени n-1.

70. Пусть функция $f(x)$ есть алгебраический полином степени m, а $L_n(x)$ - его интерполяционный полином, построенный по n+1 различным узлам. В каком случае $f(x)$ и $L_n(x)$тождественно совпадают?

a. $m = n$ (правильно)

b. $m = n + 3$

c. $m = n + 1$

d. $m = n + 2$

71. Пусть функция $f(x)$ есть алгебраический полином степени m, а $L_n(x)$ - его интерполяционный полином, построенный по n+1 различным узлам. В каком случае $f(x)$ и $L_n(x)$тождественно совпадают?

a. $m = n - 1$ (правильно)

b. $m = n + 3$

c. $m = n + 1$

d. $m = n + 2$

72. Укажите запись интерполяционного многочлена в форме Лагранжа.

a. $\sum_{i=1}^{n} f\,(x_i) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x-x_i}{x_i-x_j}$ (правильно)

b. $f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + \cdots + f(x_1, \dots, x_n)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$

c. $\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i f(x_i)}{x-x_i} / \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{x-x_i}$

d. $\sum_{k=1}^{n} f\,(x_k) T_k(x)$

73. Укажите запись интерполяционного многочлена в форме Лагранжа.

a. $\sum_{k=1}^{n} f\,(x_k) \frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega_n'(x)}$ (правильно)

b. $f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + \cdots + f(x_1, \dots, x_n)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$

c. $\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i f(x_i)}{x-x_i} / \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{x-x_i}$

d. $\sum_{k=1}^{n} f\,(x_k) T_k(x)$

74. Укажите запись интерполяционного многочлена в форме Ньютона.

a. $\sum_{i=1}^{n} f\,(x_i) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x-x_i}{x_i-x_j}$

b. $f(x_1) + f(x_1, x_2)(x - x_1) + \cdots + f(x_1, \dots, x_n)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$ (правильно)

c. $\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i f(x_i)}{x-x_i} / \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{x-x_i}$

d. $\sum_{k=1}^{n} f\,(x_k) T_k(x)$

75. Какой из методов решения систем линейных уравнений относится к прямым методам?

a. Метод Гаусса (правильно)

b. Метод Зейделя

c. Метод наискорейшего спуска

d. Метод релаксации

76. Какой из методов решения систем линейных уравнений относится к прямым методам?

a. Метод квадратного корня (метод Холесского) (правильно)

b. Метод Зейделя

c. Метод наискорейшего спуска

d. Метод релаксации

77. Какой из методов решения систем линейных уравнений относится к прямым методам?

    a. Метод ортогонализации (правильно)

    b. Метод Зейделя

    c. Метод наискорейшего спуска

    d. Метод релаксации

78. Какой из методов решения систем линейных уравнений относится к прямым методам?

    a. Метод прогонки (правильно)

    b. Метод Зейделя

    c. Метод наискорейшего спуска

    d. Метод релаксации

79. Чему по порядку величины равно число арифметических операций в методе Гаусса решения систем линейных уравнений размерности n?

    a. $O(n^3)$ (правильно)

    b. $O(n)$

    c. $O(n^2)$

    d. $O(n\ln(n))$

80. Чему по порядку величины равно число арифметических операций в методе прогонки решения систем линейных уравнений размерности n с трёхдиагональной матрицей?

    a. $O(n^3)$

    b. $O(n)$ (правильно)

    c. $O(n^2)$

    d. $O(n\ln(n))$

81. Какой из методов применим только при решении систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей?

    a. Метод прогонки (правильно)

    b. Метод Зейделя

    c. Метод наискорейшего спуска

    d. Метод релаксации

82. В каком из методов решения систем линейных уравнений используется представление матрицы системы в виде произведения $A = LL^T$, где L - нижнетреугольная матрица?

   a. Метод квадратного корня (метод Холесского) (правильно)

   b. Метод Зейделя

   c. Метод наискорейшего спуска

   d. Метод релаксации

83. В каком из методов решения систем линейных уравнений используется представление матрицы системы в виде произведения $A = LU$, где L - нижнетреугольная, а U - верхнетреугольная матрица?

   a. Метод Гаусса (правильно)

   b. Метод Зейделя

   c. Метод наискорейшего спуска

   d. Метод квадратного корня (метод Холесского).

84. Какой из методов решения систем линейных уравнений относится к итерационным методам?

   a. Метод Гаусса

   b. Метод Зейделя(правильно)

   c. Метод прогонки

   d. Метод квадратного корня (метод Холесского).

85. Какой из методов решения систем линейных уравнений относится к итерационным методам?

   a. Метод Гаусса

   b. Метод Якоби (правильно)

   c. Метод прогонки

   d. Метод квадратного корня (метод Холесского).

86. Какой из методов решения систем линейных уравнений относится к итерационным методам?

   a. Метод Гаусса

   b. Метод наискорейшего (градиентного) спуска (правильно)

   c. Метод прогонки

   d. Метод квадратного корня (метод Холесского).

87. Какой из методов решения систем линейных уравнений относится к итерационным методам?

a. Метод Гаусса

b. Метод покоординатного спуска (правильно)

c. Метод прогонки

d. Метод квадратного корня (метод Холесского).

88. Какой из методов решения систем линейных уравнений относится к итерационным методам?

a. Метод Гаусса

b. Метод сопряжённых градиентов (правильно)

c. Метод прогонки

d. Метод квадратного корня (метод Холесского).

89. Какой из методов применим для решения систем нелинейных уравнений?

a. Метод Гаусса

b. Метод сопряжённых градиентов (правильно)

c. Метод прогонки

d. Метод квадратного корня (метод Холесского).

90. Найдите норму $||\vec{x}||_2$ вектора $\vec{x} = (-3 \quad 4)^T$

a. 5 (правильно)

b. 7

c. 4

d. 1

91. Найдите норму $||\vec{x}||_1$ вектора $\vec{x} = (-3 \quad 4)^T$

a. 5

b. 7 (правильно)

c. 1

d. 4

92. Найдите норму $||\vec{x}||_\infty$ вектора $\vec{x} = (-3 \quad 4)^T$

a. 5

b. 7

c. 1

d. 4 (правильно)

93. Найдите норму $||A||_2$ матрицы $\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a. 3 (правильно)

b. 5

c. 6

d. 9

94. Найдите норму $||A||_1$ матрицы $\text{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a. 3

b. 5 (правильно)

c. 6

d. 9

95. Найдите норму $||A||_\infty$ матрицы $\text{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

a. 3

b. 5

c. 6 (правильно)

d. 9

96. Найдите норму матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, подчинённую норме вектора $||\vec{x}|| = \max\limits_{i=1,3}|x_i|$.

a. 24 (правильно)

b. 18

c. 3

d. 9

97. Найдите норму матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, подчинённую норме вектора $||\vec{x}|| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$.

a. 24

b. 18 (правильно)

c. 3

d. 9

98. Найдите норму матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, подчинённую норме вектора $||\vec{x}|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

a. 24

b. 18

c. 3 (правильно)

d. 9

99. Укажите формулу, реализующую метод Зейделя для решения систем линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$.

a. $x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$

b. $x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$ (правильно)

c. $x_i^{(k+1)} = -\tau \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \tau \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + (1-\tau) x_i^{(k)} + \tau \frac{b_i}{a_{ii}}$

d. $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \vec{r}^{(k)}, \quad \vec{r}^{(k)} = \vec{b} - A\vec{x}^{(k)}, \quad \alpha^{(k)} = \frac{(\vec{x}^{(k)}, \vec{x}^{(k)})}{(A\vec{x}^{(k)}, \vec{x}^{(k)})}$

100. Укажите формулу, реализующую метод наискорейшего (градиентного) спуска для решения систем линейных уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$.

a. $x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$

b. $x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}$

c. $x_i^{(k+1)} = -\tau \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \tau \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + (1-\tau) x_i^{(k)} + \tau \frac{b_i}{a_{ii}}$

d. $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \alpha^{(k)} \vec{r}^{(k)}, \quad \vec{r}^{(k)} = \vec{b} - A\vec{x}^{(k)}, \quad \alpha^{(k)} = \frac{(\vec{x}^{(k)}, \vec{x}^{(k)})}{(A\vec{x}^{(k)}, \vec{x}^{(k)})}$ (правильно)