

**федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
Первый Московский государственный медицинский университет им. И.М. Сеченова Министерства
здравоохранения Российской Федерации
(Сеченовский Университет)**

Кафедра Высшей математики, механики и
математического моделирования ИКНиММ НТПБ

Методические материалы по дисциплине:

Математика и теория вероятности. Математическое моделирование
основная профессиональная Высшее образование - магистратура - программа
магистратуры
45.04.04 Интеллектуальные системы в гуманитарной среде

РАЗДЕЛ 1. Математическое моделирование (5 вопросов)

1. Что такое математическое моделирование и для чего оно используется?

Ответ: Это метод исследования объектов или процессов путем создания их математического описания (модели), которое отражает наиболее существенные свойства оригинала. Используется для прогнозирования, анализа, оптимизации и принятия решений, когда натурный эксперимент невозможен, дорог или опасен.

2. В чем разница между детерминированной и стохастической моделью?

Ответ: В детерминированной модели все связи между параметрами жестко заданы и результат однозначно определяется начальными условиями. В стохастической модели учитываются случайные факторы, и результат носит вероятностный характер (например, модель распространения эпидемии с учетом случайных контактов).

3. Что такое адекватность математической модели?

Ответ: Это степень соответствия модели реальному объекту или процессу. Модель считается адекватной, если она с допустимой точностью воспроизводит изучаемые свойства оригинала в заданном диапазоне условий.

4. Перечислите основные этапы математического моделирования.

Ответ: 1) Постановка задачи и выделение существенных факторов. 2) Построение математической модели (выбор уравнений и связей). 3) Проведение расчетов или численных экспериментов. 4) Анализ результатов и проверка адекватности. 5) При необходимости — корректировка модели и повторение этапов.

5. Что такое параметрическая идентификация модели?

Ответ: Это процесс подбора числовых значений параметров модели (коэффициентов, констант) на основе экспериментальных данных так, чтобы выходные данные модели максимально совпадали с реальными наблюдениями.

РАЗДЕЛ 2. Математика и теория вероятностей (5 вопросов)

6. Что изучает теория вероятностей как раздел математики?

Ответ: Теория вероятностей изучает закономерности, возникающие в массовых случайных явлениях. Она описывает, как часто могут происходить те или иные события в условиях неопределенности.

7. Что такое событие в теории вероятностей?

Ответ: Событие — это любой исход или набор исходов некоторого случайного опыта или наблюдения, который может произойти или не произойти (например, выпадение орла при подбрасывании монеты).

8. Что такое достоверное событие? Приведите пример.

Ответ: Достоверное событие — это событие, которое обязательно произойдет в результате данного опыта. Пример: при подбрасывании обычного кубика выпадет число от 1 до 6.

9. Что такое невозможное событие? Приведите пример.

Ответ: Невозможное событие — это событие, которое не может произойти в данном опыте. Пример: при подбрасывании монеты она упадет и останется стоять на ребре (в идеализированной модели).

10. В каком диапазоне лежат значения вероятности любого события?

Ответ: Вероятность любого события заключена в пределах от 0 до 1 включительно. Вероятность невозможного события равна 0, достоверного — равна 1.

РАЗДЕЛ 3. Независимость случайных событий (8 вопросов)

11. Какие два события называются независимыми?

Ответ: Два события называются независимыми, если наступление одного из них не изменяет вероятность наступления другого.

12. Приведите пример двух независимых событий из повседневной жизни.

Ответ: Результат подбрасывания монеты и результат подбрасывания игрального кубика — эти события не влияют друг на друга. Также независимы погода за окном и выпадение определенного номера в лотерее.

13. Приведите пример двух зависимых событий.

Ответ: Извлечение черного шара из урны без возвращения и последующее извлечение белого шара из той же урны — вероятность второго события меняется в зависимости от результата первого.

14. Что такое попарная независимость событий?

Ответ: Это случай, когда каждые два события из набора являются независимыми друг от друга. Например, события А и В независимы, А и С независимы, В и С независимы.

15. Чем попарная независимость отличается от независимости в совокупности?

Ответ: Независимость в совокупности — это более сильное условие: вероятность одновременного наступления любого подмножества событий равна произведению их вероятностей. Из независимости в совокупности следует попарная независимость, но обратное не всегда верно.

16. Как проверить, независимы ли два события на практике?

Ответ: Сравнить условную вероятность события А при условии В с безусловной вероятностью А. Если они равны или близки — события независимы.

17. Если события независимы, то как найти вероятность их одновременного наступления?

Ответ: Вероятность одновременного наступления двух независимых событий равна произведению их вероятностей.

18. Может ли событие быть независимым от самого себя?

Ответ: Да, но только в том случае, если его вероятность равна 0 или 1. В остальных случаях событие не может быть независимым от самого себя.

РАЗДЕЛ 4. Непрерывные случайные величины (5 вопросов)

19. Что такое непрерывная случайная величина? Приведите примеры.

Ответ: Это величина, которая может принимать любые значения из некоторого промежутка (интервала) числовой оси. Примеры: рост человека, время реакции, температура воздуха, вес детали.

20. Что используется для описания распределения непрерывной случайной величины вместо таблицы вероятностей?

Ответ: Для непрерывной величины используется функция плотности распределения вероятностей. Вероятности отдельных значений равны нулю, поэтому распределение описывается через вероятность попадания в интервал.

21. Что такое функция плотности распределения вероятностей? Как ее можно пояснить на простом языке?

Ответ: Плотность распределения — это «интенсивность» вероятности в каждой точке. Чем выше плотность в некоторой области, тем больше вероятность случайной величине попасть именно в эту область. По сути, это аналог «частоты» для непрерывных значений.

22. Какое свойство связывает плотность распределения и вероятность попадания в интервал?

Ответ: Вероятность попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал равна площади под графиком плотности распределения над этим интервалом.

23. Какова суммарная площадь под графиком плотности распределения на всей числовой оси?

Ответ: Суммарная площадь под графиком плотности распределения всегда равна 1, поскольку это соответствует вероятности того, что случайная величина примет хоть какое-то значение.

РАЗДЕЛ 5. Нормальное распределение (7 вопросов)

24. Что такое нормальное распределение и почему оно так важно в статистике?

Ответ: Нормальное распределение (также называемое гауссовским) — это распределение непрерывной случайной величины, имеющее колоколообразную симметричную форму. Оно фундаментально, потому что многие случайные величины в природе и технике распределены примерно нормально (ошибки измерений, рост, вес, IQ), а также в силу центральной предельной теоремы.

25. Какие два параметра полностью описывают нормальное распределение?

Ответ: Два параметра: математическое ожидание (среднее значение, которое определяет положение центра кривой) и дисперсия (или среднее квадратическое отклонение, которое определяет разброс или «ширину» колокола).

26. Какую форму имеет график плотности нормального распределения?

Ответ: График имеет колоколообразную форму — симметричный относительно среднего значения, с максимумом в центре и плавно убывающими «хвостами» к краям.

27. Что такое стандартное нормальное распределение?

Ответ: Это нормальное распределение с математическим ожиданием равным нулю и стандартным отклонением равным единице. Любое нормальное распределение можно преобразовать в стандартное с помощью масштабирования и центрирования.

28. Сформулируйте суть правила «трех сигм» для нормального распределения.

Ответ: Правило «трех сигм» гласит, что практически все значения нормально распределенной случайной величины (около 99,7%) находятся в интервале от среднего минус три стандартных отклонения до среднего плюс три стандартных отклонения.

29. Почему нормальное распределение иногда называют распределением Гаусса?

Ответ: В честь немецкого математика Карла Фридриха Гаусса, который подробно исследовал это распределение и активно применял его при анализе астрономических наблюдений и теории ошибок.

30. Как влияет увеличение дисперсии на форму кривой нормального распределения?

Ответ: При увеличении дисперсии кривая становится более полой и широкой — «хвосты» утолщаются, а пик понижается. При уменьшении дисперсии кривая становится более узкой и высокой.

РАЗДЕЛ 6. Примеры дискретных распределений (7 вопросов)

31. Чем дискретная случайная величина отличается от непрерывной?

Ответ: Дискретная случайная величина может принимать только конечное или счетное множество отдельных значений (например, число попаданий в мишень, количество выпавших орлов). Непрерывная — любые значения из промежутка.

32. Опишите распределение Бернулли и приведите пример.

Ответ: Распределение Бернулли описывает случайный опыт с двумя исходами — «успех» и «неудача» (например, подбрасывание монеты). Оно имеет единственный параметр — вероятность успеха.

33. Что такое биномиальное распределение и где оно применяется?

Ответ: Биномиальное распределение описывает число успехов в серии из фиксированного числа независимых испытаний, каждое из которых имеет два исхода (успех/неудача). Пример: число попаданий в корзину при 10 бросках мяча.

34. Какие параметры нужны для описания биномиального распределения?

Ответ: Два параметра: число испытаний и вероятность успеха в одном испытании.

35. Что такое геометрическое распределение и чем оно отличается от биномиального?

Ответ: Геометрическое распределение описывает число неудач до первого успеха (или число испытаний до первого успеха) в последовательности независимых испытаний. Отличие от биномиального: число испытаний не фиксировано, мы ждем первого успеха.

36. Опишите распределение Пуассона и область его применения.

Ответ: Распределение Пуассона описывает число редких событий, происходящих за фиксированный промежуток времени или в фиксированном объеме пространства. Применяется для числа звонков в колл-центр, числа мутаций на участке ДНК, числа автомобилей на перекрестке за час.

37. Какой параметр описывает распределение Пуассона?

Ответ: Единственный параметр — среднее число событий (интенсивность) за фиксированный интервал времени или пространства.

РАЗДЕЛ 7. Случайные величины (8 вопросов)

38. Что такое случайная величина в теории вероятностей?

Ответ: Случайная величина — это величина, которая в результате случайного опыта принимает одно из возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно. Это числовая характеристика случайного исхода.

39. В чем разница между дискретной и непрерывной случайной величиной?

Ответ: Дискретная принимает отдельные значения (счетное множество), непрерывная — любые значения из интервала.

40. Что такое закон распределения случайной величины?

Ответ: Это правило, которое устанавливает связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями (для дискретных — таблица или формула, для непрерывных — плотность).

41. Что такое математическое ожидание случайной величины и что оно показывает?

Ответ: Математическое ожидание — это среднее взвешенное значение случайной величины, где весами служат вероятности. Оно показывает «центр» распределения и является характеристикой среднего положения случайной величины.

42. Что такое дисперсия случайной величины и что она измеряет?

Ответ: Дисперсия — это мера разброса случайной величины вокруг ее математического ожидания. Чем больше дисперсия, тем сильнее значения отклоняются от среднего.

43. Каков физический смысл среднего квадратического отклонения?

Ответ: Среднее квадратическое отклонение (или стандартное отклонение) — это корень из дисперсии. Оно выражается в тех же единицах, что и сама величина, и показывает типичный размер отклонения от среднего.

44. Что такое функция распределения случайной величины и для чего она нужна?

Ответ: Функция распределения — это функция, которая для любого числа x показывает вероятность того, что случайная величина примет значение меньше x . Она универсальна и описывает как дискретные, так и непрерывные величины.

45. Каким свойствам удовлетворяет функция распределения?

Ответ: 1) Ее значения лежат между 0 и 1. 2) Она не убывает при росте x . 3) При стремлении x к минус бесконечности она стремится к 0, при стремлении к плюс бесконечности — к 1.

РАЗДЕЛ 8. Условная вероятность и независимость (5 вопросов)

46. Что такое условная вероятность и как ее можно объяснить простыми словами?

Ответ: Условная вероятность — это вероятность одного события при условии, что другое событие уже произошло. Она показывает, как изменилась вероятность события A , когда стало известно, что событие B наступило.

47. Приведите пример условной вероятности из жизни.

Ответ: Вероятность того, что на улице идет дождь, при условии, что небо покрыто тучами, выше, чем просто вероятность дождя без этого условия.

48. Как связаны условная и безусловная вероятности в случае независимых событий?

Ответ: Если события независимы, то условная вероятность события А при условии В равна безусловной вероятности А. Другими словами, знание о том, что событие В произошло, ничего не меняет в вероятности события А.

49. Что такое формула полной вероятности? В каких случаях она применяется?

Ответ: Формула полной вероятности позволяет найти вероятность события А, если известно, что оно может произойти при наступлении одного из нескольких несовместных и исчерпывающих условий (гипотез). Она применяется, когда событие А «разбивается» на случаи по разным условиям.

50. Что такое теорема Байеса и в чем ее практическая ценность?

Ответ: Теорема Байеса позволяет пересчитывать вероятности гипотез после того, как стало известно, что событие А произошло. Ее практическая ценность — в обновлении наших знаний (пересмотре вероятностей) по мере получения новой информации. Она широко применяется в диагностике, машинном обучении и принятии решений.